Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2024 - 2025

Αντώνης Βαλέργας | **Γαβρήλος Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς | **Στέλιος Μιχαήλογλου**
Άγγελος Μπλιάς | **Θανάσης Νικολόπουλος**
Δημήτρης Πατσιμάς | **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Νίκος Σαμπάνης | **Βαγγέλης Τόλης**
Νίκος Τούντας | **Ισαάκ Χιονίδης**

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
4ο Διαγώνισμα
Ύλη: 1ο Κεφάλαιο

23-11-2024

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι , για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\eta$.

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f οποιαδήποτε συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)>0$ τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α .

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

ε) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

- $-1\le f(x)\le x^4-2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2+x}+2x & ,x<-\dfrac{1}{4}\\ -1 & ,x=0\\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu 4x-1}{x} & ,x>0\end{cases}$.

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

7 μονάδες

Β2. Να δείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\dfrac{1}{4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$.

12 μονάδες

Β3. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=-2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(-1,1)$.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\left(f^2(x)-x\right)\left(e^x+x\right)=0$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(1)=-1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\sqrt{x}$.

8 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu f(x)+\sqrt{x}>0$ για κάθε $x>0$.

4 μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+f\left(x^2+x+1\right)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\left(f^2(x)\right)}{\eta\mu 2x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f^2(x)}\right]$

6 μονάδες

Γ4. Να λύσετε στο $[0,+\infty)$ την εξίσωση $f(x)=1-e^{-x}$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+\eta\mu x)-3$ για την οποία ισχύουν:

- Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.
- Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την f στο διάστημα $[1,2]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0,+\infty)$ (3 μονάδες) και στη συνέχεια ότι $0<\rho_1<1<\rho_2<2$ (5 μονάδες).

8 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $2e^3+e^3\eta\mu 2<e^{e^2}$ (2 μονάδες) και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2e^3+e^3\eta\mu 2\right)^x-e^{xe^2}}{e^{e^{2x}}-1}$ (2 μονάδες).

4 μονάδες

Δ3. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

3 μονάδες

Δ4. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο x_0 το $f(x_0)$ και γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{e^x}}{x}=+\infty$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\rho_1<x_0<\rho_2$ (1 μονάδα) και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (2 μονάδες).

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=\lambda$, όπου $\lambda>f(x_0)$, σε τουλάχιστον δύο σημεία (5 μονάδες). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f^2(x)$ έχει τουλάχιστον τέσσερις ρίζες (2 μονάδες).

3 + 7 = 10 μονάδες

Καλή τύχη!